GRUPO LEMA

Somos un equipo independiente de expertos en educación matemática

Las Matemáticas en el Abecedario: Una fórmula de Euler

Grupo LEMA
www.grupolema.org

Introducción para el profesor El propósito de esta actividad es dar a los estudiantes la oportunidad de descubrir la famosa fórmula de Euler

$$V - E + F = 2,$$

que aplica para cualquier poliedro. En esta, V es el número de vértices, E es el número de aristas, y F es en número de caras. Puede ver más detalles de esta en

- `https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Euler_para_poliedros` y
- `https://es.wikipedia.org/wiki/Característica_de_Euler`

Puede hacer esta actividad con estudiantes de casi cualquier grado hasta el INTERLUDIO. Lo que sigue después del interludio puede ser más apropiado para estudiantes de bachillerato por el nivel de razonamiento matemático al que incita, pero el nivel de contenido matemático no incrementa.

La actividad inicia sin mención alguna a poliedros, pues aplica también para "figuras de palitos en el plano" en la forma

$$V - E + F = 1,$$

siempre y cuando se cumplan ciertas condiciones con los palitos que se incluyen en las instrucciones para los estudiantes (que no se intersecten, que no creen figuras separadas).

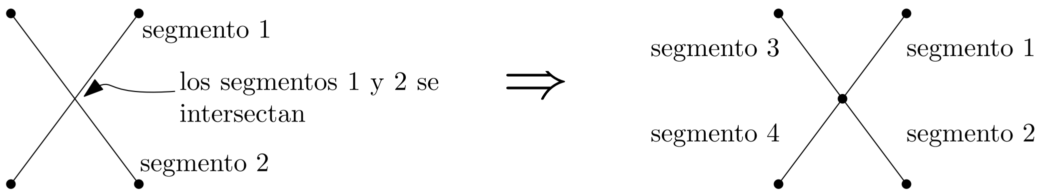
Las primeras "figuras de palitos" con las cuales los estudiantes van a trabajar, son sus propias versiones de las letras en mayúscula. Esto permite suficiente variedad entre lo que analiza cada estudiante sin que haya demasiada variedad en el grupo, y facilita hacer discusiones con toda la clase.

Leonhard Euler es uno de los matemáticos más importantes y prolíficos de la historia. Nació en Suiza y vivió entre 1707 y 1783. Tiene muchas fórmulas denominadas *fórmula de Euler*, y en esta sesión descubrimos una de sus más famosas fórmulas.

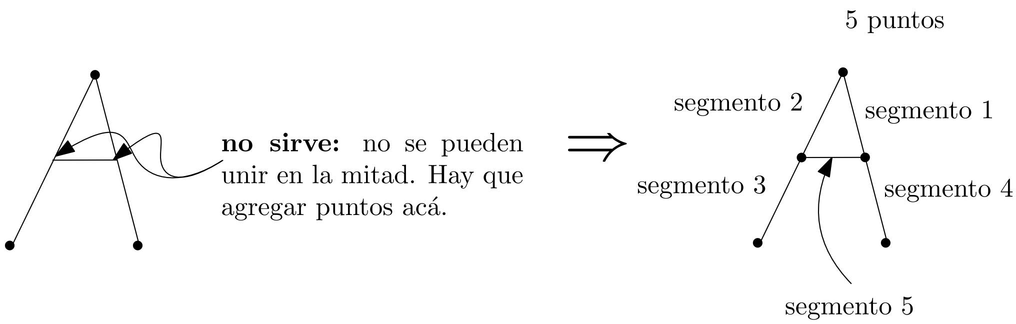
1. Escribe las primeras 10 letras del alfabeto en mayúsculas en una hoja de papel. Asegúrate de escribirlas sin "repasar líneas" (puedes levantar el lápiz todas las veces que quieras) y sin que queden partes despegadas.

2. Encuentra los puntos en cada letra para poder "descomponerla" en segmentos rectos o curvos que no intersectan otros segmentos excepto en sus extremos. Por ejemplo, para la letra X tenemos:

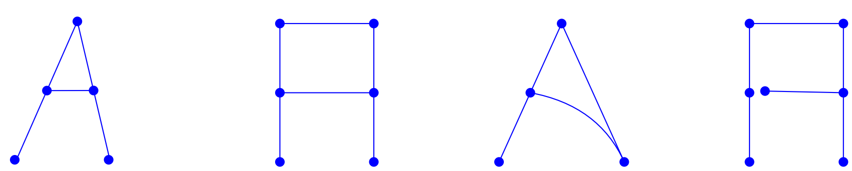
4 puntos y 2 segmentos: **no sirve** | 5 puntos y 4 segmentos: **sí sirve**



Igualmente, para la letra A, ¡es importante tener en cuenta que no se pueden conectar en la mitad!

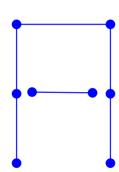


Nota para el profesor: De a los estudiantes un par de minutos para iniciar este trabajo, y después haga una discusión con toda la clase en la que se aseguran todos que la están haciendo bien. Por ejemplo, puede elegir varias versiones de la letra "A", y mostrar distintas formas de descomponerlas.



5 puntos	6 puntos	4 puntos	7 puntos
5 segmentos	6 segmentos	4 segmentos	6 segmentos
1 región encerrada	1 región encerrada	1 región encerrada	0 regiones encerradas

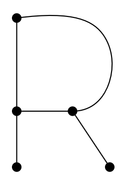
Tenga en cuenta que algo como lo siguiente no es válido, porque no es conexo (tiene partes despegadas).



3. Completa la siguiente tabla con tus propias versiones de digramas para cada letra:

letra	# puntos	# segmentos	# regiones encerradas
A			
B			
C			
D			
E			
F			
G			
H			
J			
K			
R	5	5	1

El ejemplo de la R se hizo con este diagrama (tocó agregar el punto para la pata derecha de la R):



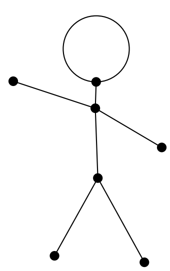
4. Ahora, agrega una columna a tu tabla y calcula:

$$\#\text{puntos} - \#\text{segmentos} + \#\text{regiones encerradas}$$

¿Qué ves? Comparte con un compañero.

Nota para el profesor: A los estudiantes que lo hayan hecho bien les va a dar 1 en todas las filas.

5. ¡Ahora con garabatos cualesquiera! Haz tu propio "dibujo-garabato de palitos", donde las únicas reglas son que los segmentos no se pueden intersectar y todos los puntos deben estar conectados (no son dos dibujos separados). Ejemplo:



Calcula de nuevo:

$$\#\text{puntos} - \#\text{segmentos} + \#\text{regiones encerradas}$$

¿Qué ves? ¿Hay algún caso en el que no pasa lo que estás viendo? ¡Intenta encontrarlo!

Nota para el profesor: De nuevo, a los estudiantes que lo hayan hecho bien les va a dar 1 siempre. Es el momento de hacer una discusión (que se presenta como INTERLUDIO a continuación en el texto de los estudiantes).

INTERLUDIO: Te van a contar un poco sobre la famosa Fórmula de Euler:

$$V - E + F = 2$$

Nota para el profesor: Como lo describe el link `https://es.wikipedia.org/wiki/Característica_de_Euler`, esta fórmula es válida para cualquier cualquier poliedro. La conexión con las "figuras de palitos" y la fórmula $V - E + F = 1$ que descubrieron los estudiantes es la siguiente:

Todo poliedro se puede "inflar" hasta que tenga foma de esfera sin cambiar los valores de V, E y F. Después, se puede "aplanar" esa esfera quitando un punto (imagine hacer un pequeño hueco en la esfera con un alfiler, y agrandar ese hueco hasta aplanar la esfera). Lo que resulta es un plano con un "dibujo de palitos", y la única región encerrada de la esfera que no se contó es la que quedó como la "región de afuera" del "dibujo de palitos".

Se presenta la fórmula de esta forma a los estudiantes, con el 1 y no con el 2, porque es la forma en la que esta fórmula se encuentra comúnmente (como en los links de wikipedia). Para que los estudiantes hagan la conexión, lo importante es mostrarles que había una "región" que no se estaba contando en sus cuentas: la "región de afuera", que es la que completa la esfera. Si se agrega eso a las cuentas, ¡el 1 que les da se vuelve un 2!

Escribe lo que significa cada letra y sobre lo que dice la Fórmula de Euler:

$V =$ _________________
$E =$ _________________
$F =$ _________________

La fórmula dice que:

Nota para el profesor: Lo que sigue a continuación son posibilidades de trabajo extra, si se tiene el tiempo. El contenido hasta acá debe poder hacerse en 50 minutos, y el contenido que sigue toma aproximadamente 50 minutos más. Consiste de:

- [Sección 6] Extensiones en las que se ve que la fórmula también aplica para "figuras de palos disconexas", en cuyo caso

  $$V - E + F = \#\text{de componetes conexas (es decir, partes separadas)},$$

  y en el caso que no es una esfera, en cuyo caso $V - E + F$ da la "Característica de Euler" de la superficie.

- [Sección 7] Una aproximación a los argumentos que hacen parte de una demostración formal de este hecho. La idea es que los estudiantes vean que agregar o quitar puntos, o segmentos cambia los valores de V, E, y F de una forma predecible que preserva el valor de $V - E + F$.

  La idea principal de una demostración es la siguiente (para que la tenga presente si decide hacer esta parte):

- Se divide en dos casos: el grafo es un árbol, o el grafo tiene al menos ciclo (ver la definición de estos términos en `https://es.wikipedia.org/wiki/Árbol_(teoría_de_grafos)`).
- Si el grafo es un árbol, se argumenta que $V - E + F = 2$ para todos los árboles. Razón: para crecer un árbol se agrega un punto y una arista, pero nunca se agregan caras (porque debe seguir siendo un árbol). Por eso, ¡el valor de $V - E + F$ nunca va a cambiar! En realidad, para cualquier árbol se tiene la relación $E = V - 1$ y $F = 1$!
- Si el grafo no es un árbol, es porque debe tener un ciclo y se argumenta por inducción: Si se quita una arista del ciclo, el grafo no se va a desconectar (porque no podría ser un ciclo) y se unen dos regiones (las que separaba esa arista). Por la hipótesis de inducción, $V - E + F = 2$.
- Para más detalles, se puede ver el video en inglés: https://www.youtube.com/watch?v=5ywif1Zpeo4

6. Dos posibles extensiones:

6.1 Sin conectar: Calcula

$$\#\text{puntos} - \#\text{segmentos} + \#\text{regiones encerradas}$$

para las siguientes figuras:

Figura A: #p − #s + #r =

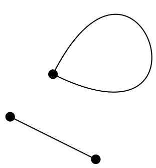


Figura A

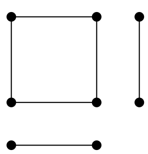


Figura B

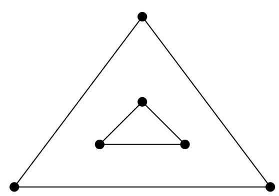


Figura C

Figura B: #p − #s + #r =

Figura C: #p − #s + #rs =

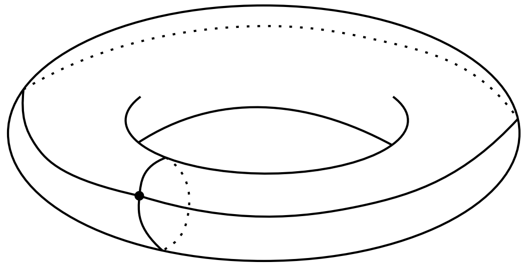
¿Cuál crees es el valor si no están conectados?

$$\#\text{puntos} - \#\text{segmentos} + \#\text{regiones encerradas} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

6.2: Sin ser una esfera: Calcula

$$\#\text{puntos} - \#\text{segmentos} + \#\text{regiones encerradas}$$

para la siguiente figura:

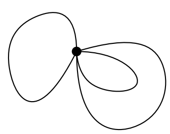


7. EXTRA: De regreso a por qué $V - E + F = 2$ (o 1) es cierto. Trata de progresar poco a poco en entender lo que está pasando:

1. Calcula

$$\#\text{puntos} - \#\text{segmentos} + \#\text{regiones encerradas} \tag{1}$$

   para todos los grafos con un solo punto que se te ocurran. Ejemplo:



1 punto
3 segmentos
3 regiones encerradas

2. Calcula (1) para todos los grafos con dos segmentos se te ocurran (pueden tener uno o más puntos). Recuerda, ¡no puede haber intersecciones!

3. Dibuja al menos tres grafos distintos con tres segmentos y calcula (1) para estos.

4. Supongamos que tienes un grafo y que le agregas un punto extra al lado. Conectas ese punto con algún punto del grafo (sin que haya intersecciones). ¿Cómo cambian el número de puntos, segmentos y regiones encerradas al agregar ese punto? ¿Qué pasa con (1) al agregar ese nuevo punto? ¿por qué?

5. Asume que tienes un grafo y hay dos puntos que no están conectados y que puedes conectar con un segmento sin que haya intersecciones. ¿Cómo cambian el número de puntos, segmentos y regiones encerradas al agregar ese segmento? ¿Qué pasa con (1) al agregar ese nuevo segmento? ¿por qué?